SỞ GD-ĐT HẢI DƯƠNG
Trường THPT chuyên Nguyễn Trãi

ĐỀ THI NĂNG KHIẾU LẦN THỨ BA
NĂM HỌC 2020-2021
Môn: Toán 11
Thời gian làm bài: 180 phút

Câu 1. (3 điểm)

a) Giải phương trình $2^{x-1}-2^{x^2-x}=\log_3\left(\dfrac{x^2-x}{x-1}\right)$ với $x>1$.

b) Tính nguyên hàm $\int (x^2+1)\ln \mathrm{x}\mathrm{dx}$.

c) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi $M;N$ là trung điểm $SA;BC$. Xét mặt phẳng (P) qua MN và song song với đường thẳng BD. Tìm thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABCD$.

Câu 2. (1,5 điểm) Cho dãy số thực $\{x_n\}$ xác định bởi $\begin{cases} x_1=3 \\ x_{n+1}=\sqrt{21+\sqrt{2\mathrm{x}_n+6}} \end{cases}$ với mọi $n=1,2,...$

Chứng minh rằng dãy số $\{x_n\}$ có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Câu 3. (2,5 điểm)

a) Tìm các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện: $f((1+f(x)).f(y))=y+xf(y)$ $\forall x;y\in\mathbb{R}$

b) Cho trước số nguyên dương $n.$ Tìm số nguyên dương k_n nhỏ nhất sao cho $3^{k_n}\equiv 1(mod\,11^n)$ và $5^{k_n}\equiv 1(mod\,11^n)$.

Câu 4. (2 điểm)

Cho tứ giác lồi $ABCD$ nội tiếp (O). Giả sử tia AB cắt DC tại E, tia BC cắt AD tại F, đường thẳng AC cắt đường thẳng EF tại G. Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác AEG cắt lại (O) tại K khác $A.$

a) Chứng minh rằng KD đi qua trung điểm I của EF.

b) Giả sử EF lần lượt cắt BD, đường tròn ngoại tiếp tam giác IAC tại $H;J\,(J\neq I)$. Chứng minh rằng $OH=OJ$.

Câu 5. (1 điểm) Trong mặt phẳng cho 5 điểm. Những đường thẳng nối những điểm này không song song, không vuông góc và không trùng nhau. Qua mỗi điểm đã cho, kẻ những đường vuông góc với tất cả các đường thẳng đi qua 2 điểm trong 4 điểm còn lại. Tìm số lượng lớn nhất những điểm cắt nhau của những đường hạ vuông góc, không tính 5 điểm đã cho.

HƯỚNG DẪN CHẤM

Câu 1:

a)

Biến đổi phương trình (1) ta được $2^{x-1}+\log_3(x-1)=2^{x^2-x}+\log_3(x^2-x)$ (được tách do $x>1$)

Xét hàm số $f(t)=2^t+\log_3 t$ với $t\in(0;+\infty)$. Ta có $f'(t)=2^t.\ln 2+\dfrac{1}{t.\ln 3}>0$

Như vậy $f(x-1)=f(x^2-x)\Leftrightarrow x-1=x^2-x\Leftrightarrow x=1.$ (loại)

Vậy phương trình vô nghiệm.

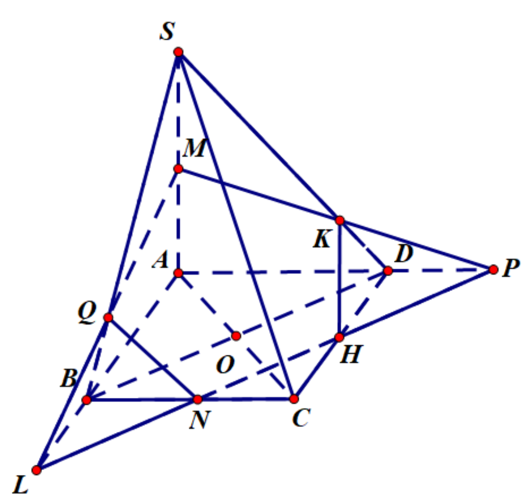
b) Theo công thức nguyên hàm từng phần với $\begin{cases} u=\ln x \\ dv=(x^2+1)dx \end{cases}$;ta có:

$$\int (x^2+1)\ln x dx=\left(\frac{1}{3}x^3+x\right)\ln x-\int\left(\frac{1}{3}x^3+x\right).\frac{1}{x}dx$$

$$=\left(\frac{1}{3}x^3+x\right)\ln x-\int\left(\frac{1}{3}x^2+1\right)dx$$

$$=\left(\frac{1}{3}x^3+x\right)\ln x-\frac{1}{9}x^3-x+C$$

c)



Kẻ NH song song với BD; cắt AD ở P và AB ở L. Nối MP cắt SD ở K và ML cắt SB ở Q. Khi đó thiết diện là $MQNHK$.

Câu 2:

Bằng quy nạp ta chứng minh được $x_n \geq 3$ và $x_n \leq 5$.

Ta có $x_2 > x_1$ và

$x_{n+1} - x_n = \dfrac{x_{n+1}^2 - x_n^2}{x_{n+1} + x_n} = \dfrac{(21+2\sqrt{x_n+6}) - (21+2\sqrt{2x_{n-1}+6})}{x_{n-1}+x_n} = \dfrac{\sqrt{2x_n+6} - \sqrt{2x_{n-1}+6}}{x_{n-1}+x_n} > 0$ theo nguyên lý quy nạp.

Như vậy dãy đã cho tăng và bị chặn trên bởi 5; suy ra dãy có giới hạn hữu hạn.

Đặt $\lim = L$ ta có $L = \sqrt{21+\sqrt{2L+6}}$.

Bình phương hai lần (hoặc sử dụng liên hợp) ta được $L=5$.

Câu 3:

a) $f((1+f(x)).f(y)) = y + xf(y)$ (1)

Từ (1) thay $x=0$ ta được $f((1+f(0))f(y)) = y; \forall y \in \mathbb{R}$ (2)

Giả sử $f(a) = f(b)$, thay vào (2) ta được $a=b$. Như vậy f là đơn ánh

tồn tại $x = (1+f(0))f(y)$ sao cho $f(x) = y$. suy ra f là toàn ánh, dẫn tới f là song ánh. Vì thế tồn tại $\mathrm{c} \in \mathbb{R}$ sao cho $\mathrm{f(c)=0}$. Từ (1) cho $\mathrm{y=c}$ được $\mathrm{f(0)}=c$

Từ (1) cho $x=y=0$ ta được $f((1+c)c)=0$

Vậy $f((1+c)c) = f(c)$, mà f là đơn ánh nên $(1+c)c = c \Leftrightarrow c=0 \Rightarrow f(0)=0$

Từ (1) cho $x=0$ ta dược $f(f(y)) = y, \forall y \in \mathbb{R}$ (3)

Từ (1) thay x bởi $\mathrm{f(x)}$, thay y bởi $\mathrm{f(y)}$ và sử dụng (3) ta có:

$f(y(1+x)) = f(y) + yf(x), \forall x, y \in \mathbb{R}$ (4)

Từ (4), cho $x=-1$, sử dụng $f(0)=0$ và dặt $a=-f(-1)$ ta được : $f(y) = ay, \forall y \in \mathbb{R}$

Thay vào (3) và đồng nhất ta được $a \in \{1;-1\}$

a) Ta sẽ chứng minh $k_n = \dfrac{\phi(11^n)}{2}$

+) Thật vậy, đầu tiên ta chứng minh thỏa mãn điều kiện đồng dư.

Ta có: $3^{\phi(11^n)} \equiv 5^{\phi(11^n)} \equiv 1 \left(\bmod 11^n\right)$ (định lý Euler), Với $\phi\left(11^n\right)=11^n-11^{n-1}=10.11^{n-1}\left(\Rightarrow k_n=5.11^{n-1}\right)$

$\Rightarrow 3^{\phi\left(11^n\right)}=3^{10.11^{n-1}}\equiv 1\left(\bmod 11^n\right)$

$\Rightarrow \left(3^{k_n}-1\right)\left(3^{k_n}+1\right)\vdots 11^n$

Và $\left(5^{k_n}-1\right)\left(5^{k_n}+1\right)\vdots 11^n$

Ta cũng có $3^5\equiv 5^5\equiv 1(\bmod 11)$

$\Rightarrow 3^{5t}\equiv 5^{5t}\equiv 1(\bmod 11)$

Vì vậy $k_n=5.11^{n-1}:5$

$\Rightarrow 3^{k_n}-1:11^n$ và $5^{k_n}-1:11^n$

+) Ta chứng minh k_n là số nhỏ nhất.

Gọi $h_n\le k_n$ là số tự nhiên nhỏ nhất sao cho $5^{h_n}\equiv 1\left(\bmod 11^n\right)\Rightarrow 5^{h_n\cdot t}\equiv 1\left(\bmod 11^n\right)$

Vì $5^{k_n}\equiv 1(\bmod 11)$ và h_n là số nhỏ nhất nên $h_n \mid k_n=5.11^{n-1};k_n=h_n.t$

$\Rightarrow h_n=5.11^r$ với $0\le r\le n-1$ (ta cần 5 ở h_n vì $5^{5t}-1$: 11).

Để ý rằng: $5^{5.11^r}-1=\left(5^{5.11^{r-1}}\right)^{11}-1$

$=\left(5^{5.11^{r-1}}-1\right)\cdot\left(\left(5^{5.11^{r-1}}\right)^{10}+\left(5^{5.11^{r-1}}\right)^{9}+\ldots+\left(5^{5.11^{r-1}}\right)^{0}\right)$

Vì $5^{k_2\cdot t}=5^{55.t}\equiv 1\left(\bmod 11^2\right)$

$\Rightarrow r-1\ge 1$ thì $5^{5.11^{r-1}}\equiv 1\left(\bmod 11^2\right)$

$\Rightarrow\left(5^{5.11^{r-1}}\right)^{10}+\left(5^{5.11^{r-1}}\right)^{9}+\ldots+\left(5^{5.11^{r-1}}\right)^{0}=\left(11^2\cdot q_{10}+1\right)^{10}+\left(11^2\cdot q_9+1\right)^9+$

$\ldots+1=11^2\cdot Q_1+11=11.\left(11.Q_1+1\right)$

Làm tương tự đến $\left(5^{5.11}-1\right)\cdot 11^{r-1}\cdot(11.Q+1)=11^2\cdot p\cdot 11^{r-1}\cdot(11.Q+1)$

Để chia hết cho $11^n\Rightarrow r+1\ge n$

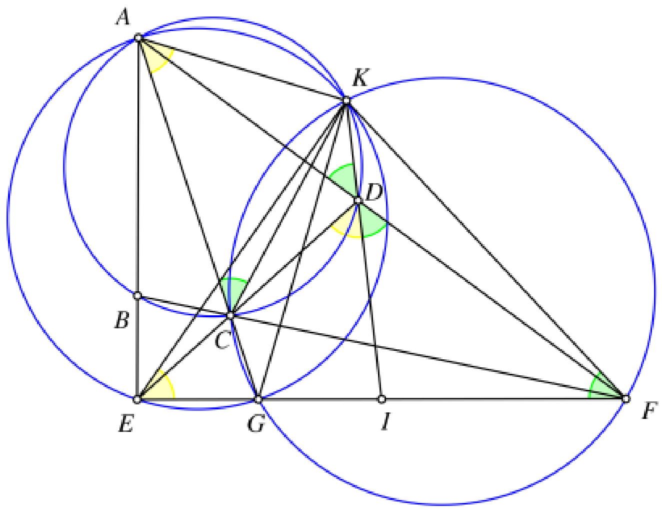
$\Rightarrow r_{\min}=n-1\Rightarrow h_n=5.11^{n-1}=k_n$

Làm tương tự trong trường hợp 3^{h_n}, ta có kết quả: $h_n=5.11^{n-2}$. Nhưng k_n thỏa mãn cả hai điều kiện 3^{k_n} và $5^{k_n}\equiv 1\left(\bmod 11^n\right)$.

Như vậy k_n phải bằng 5.11^{n-1} và ta có đpcm.

Câu 4:

a)



Giả sử $KD \cap EF$ tại I, ta chứng minh I là trung điểm EF

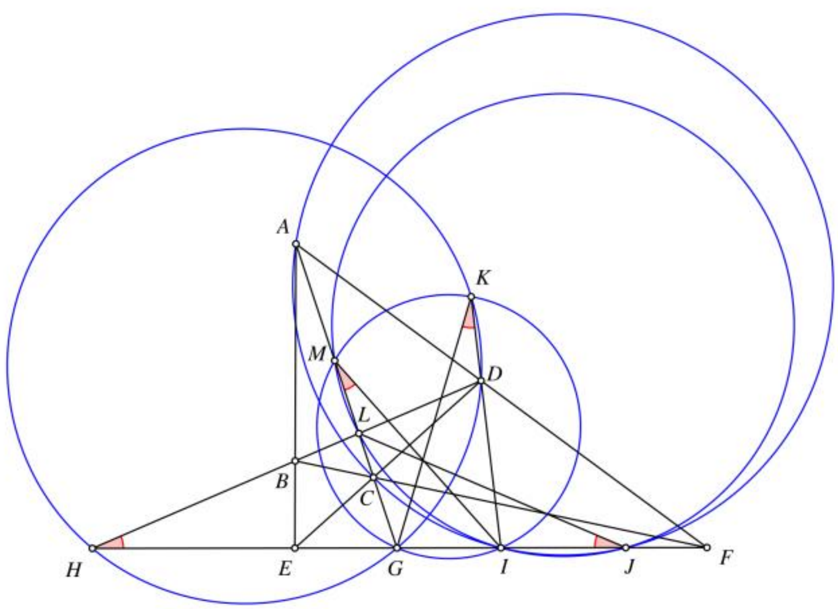
+) $\angle IEK = \angle GAK (K \in (AEG)) = \angle IDE (K \in (O))$ nên $\triangle IEK \sim \triangle IDE$

Dẫn tới $IE^2 = ID.IK$

+) Ta có K là điểm Miquel của tứ giác toàn phần $EBCGAF$ do K thuộc $(ABC), (AEG)$ nên $K \in (FCG)$. Từ đó, ta được $\angle IFK = \angle ACK = \angle ADK (K \in (O))$

$= \angle IDF$ nên $\triangle IFK \sim \Delta IDF$, dẫn tối $IF^2 = ID.IK = IE^2$ hay $IE = IF$

b)



Gọi L là giao điểm của $AC;BD$. theo định lý Brocard, $OL \perp EF \equiv HJ$ nên yêu cầu bài toán tương đương chứng minh $LH = LJ$. Gọi M là trung điểm A C. Do $(AC, LG) = -1$ nên $\overline{GM} \cdot \overline{GL} = \overline{GA} \cdot \overline{GC} = \mathcal{P}_{G\backslash(IAC)} = \overline{GI} \cdot \overline{GJ}$ nên tứ giác $MLIJ$ nội tiếp. Suy ra $\angle LJH = \angle GMI$

- Do K là giao điểm của $(GAE),(GCF)$ nên tồn tai phép vị tự quay $\mathcal{S}$ tâm K sao cho $\mathcal{S}: A \to E, C \to F$ mà M;I là trung diểm AC; EF nên $\mathcal{S}: M \to I$ dẫn tới $K \in (GMI)$. Suy ra $\angle GMI = \angle GKD.$

- Do $(HG, EF) = -1$ nên $\overline{IH} \cdot \overline{IG} = IE^2 = \overline{ID} \cdot \overline{IK}$ nên tứ giác KDGH nội

tiếp. Suy ra $\angle LHJ = \angle GKD = \angle GMI = \angle LJH$ hay $\triangle LHJ$ cân tai L

Câu 5:

Bốn điểm xác định định $C_4^2 = 6$ đường thẳng. Suy ra từ mỗi điểm trong những đã cho có thể kẻ được 6 đường vuông góc, vậy tổng cộng là 30 đường vuông góc. Số lượng những điểm cắt nhau những đường vuông góc này là $C_{30}^2 = 435.$ Số lượng này phải trừ đi những điểm sau:

- Số lượng những điểm không tính trong mỗi cặp năm điểm đã cho, nghĩa là $5C_6^2 = 75$ (điểm).

- Từ hai điểm hạ đường vuông góc xuống cùng một đường đường thẳng thì chúng song song với nhau và không cắt nhau, ta gọi những điểm này là những điểm bị mất. Số lượng những điểm bị mất từ những đường thẳng song song và vuông góc với các đường thẳng đi qua $(5-2) = 3$ (điểm) còn lại. Suy ra mất đi $C_3^2 = 3$ (điểm). Vậy tổng mất đi $3 \cdot C_5^2 = 30$ (điểm).

- Căp năm điểm đã cho lấy theo bộ ba xác định $C_5^3 = 10$ (tam giác). Tại mỗi trực tâm mất đi hai điểm hay là tổng số mất đi 20 điểm.

Suy ra số lượng lớn nhất những điểm cắt nhau là $435 - 75 - 30 - 20 = 310$